سلسلة اعمال موجهة رقم 4

تمرين 1. ليكن $(E, \|.\|_E)$, فضاءا نظيميا على الحقل $\mathbb{R}$.

1. برهن انه:

$$\forall x_0 \in E, \exists f_0 \in E'; \quad \|f_0\|_{E'} = \|x_0\|_E \text{ و } < f_0, x_0 >= \|x_0\|^2$$

2. برهن انه: $\forall x \in E: \quad \|x\| = \sup_{f \in E', \|f\|_{E'} \leq 1} | < f, x > | = \max_{f \in E', \|f\|_{E'} \leq 1} | < f, x > |$

تمرين 2. ليكن $(E, \|.\|_E)$, فضاءا نظيميا على الحقل $\mathbb{K}$.

1. برهن انه:

$$x_n \xrightarrow{E} x \Longrightarrow x_n \overset{E}{\rightharpoonup} x$$

2. برهن انه اذا كان E دو بعد منتهي فان الاستلزام العكسي في 1 صحيح.
3. برهن انه اذا كان E فضاءا هيلبرتي فان الاستلزام العكسي في 1 يكون صحيح اذا تحقق مايلي $\|x\|_E = \lim \|x_n\|_E$
4. برهن انه اذا كان : $x_n \overset{E}{\rightharpoonup} x$ فان المتتالية محدودة.
5. :برهن انه

$$(x_n \overset{E}{\rightharpoonup} x \text{ و } f_n \xrightarrow{E'} f) \Longrightarrow (< f_n, x_n > \xrightarrow{\mathbb{R}} < f, x >)$$

تمرين 3. ليكن $(E, \|.\|)$ فضاء هيلبرتي على الحقل $\mathbb{R}$ و $A \in \mathcal{L}(E)$.

1. بين انه، اذا كان a عنصرا ثابتا من E فان المؤثر A المعرف ب $Ax =< a, x > a$ هيرميتي موجب.
2. بين انه $B \in \mathcal{L}(E)$ هرميتي فان B^2 هرميتي موجب.

تمرين 4. ليكن $E = \mathbb{L}^2([0, +\infty[)$ المزود بالجداء السلمي $\forall f, g \in E :< f, g >= \int_0^\infty f(x)g(x)dx$.

نعتبر المؤثر U المعرف ب

$$\forall f \in E : (U(f))(x) = \begin{cases} f(x-1) & x \geq 1 \\ 0 & 0 \geq x < 1 \end{cases}$$

1. بين ان U تقايس.
2. عين القرين U^* ل U؟ احسب U^*U.
3. ليكن $V = UU^*$؛ بين ان V هيرميتي و احسب V^2.
4. احسب $Vf = UU^*f$ لاجل $f \in E$.

تمرين 5. لتكن (α_n) متتالية اعداد مركبة محدودة.

1. بين انه اذا كان $x = (x_0, x_1, ..., x_n, ...) \in l^2$, فان المتتالية $y = (0, \alpha_0 x_0, \alpha_1 x_1, \alpha_2 x_2, ..., \alpha_n x_n, ...)$ تنتمي الى l^2.
2. نرمز ب U للمؤثر الذي يرفق بكل x العنصر y :.$y = Ux$ تحقق بان U مؤثر مستمر واحسب $\|U\|$.
3. احسب U^*x, U^*Ux et UU^*. تحقق ان: $\|U^*\| = \|U\|$.
4. نفرض ان $|\alpha_n| = 1$. $n \geq 0$, بين ان $U^*U = Id \neq UU^*$ و U تقايس.

Université du 20 août 1955 Skikda.
Faculté des Sciences
Département de Mathématiques
3^{eme} année LICENCE
Module : Introduction à la théorie des opérateurs linéaires.

Dr N. BELLAL.
n.bellal@univ-skikda.dz
2016/2017

Série N° 4

Opérateurs dans les espaces de Hilbert

Exercice 1

Soit $(E, \| . \|_E)$ un espace normé réel. Montrer que :

1) $\forall x_0 \in E, \exists f_0 \in E' : \| f_0 \|_{E'} = \| x_0 \|_E$ et $< f_0 , x_0 >= \| x_0 \|^2$
2) $\forall x \in E : \| x \| = \sup \{ |<f, x>| / f \in E' , \| f \|_{E'} \leq 1 \} = \max \{ |<f, x>| / f \in E' , \| f \|_{E'} \leq 1 \}$

Exercice 2

Soit $(E, \| . \|_E)$ un espace normé sur le corps IK. Montrer que :

1) Si $x_n \to x$ dans E alors $x_n \rightharpoonup x$ dans E.
2) Si $\dim E < +\infty$ alors la réciproque dans 1) est encore vraie.
3) Si $\dim E < +\infty$ alors la réciproque dans 1) est vraie si $\lim_{n \to +\infty} \| x_n \|_{\mathbf{E}} = \| x \|_{\mathbf{E}}$.
4) Si $x_n \rightharpoonup x$ dans E alors la suite (x_n) est bornée.
5) Si $x_n \rightharpoonup x$ dans E et $f_n \to f$ dans E' alors $< f_n , x_n > \to < f, x >$ dans IR

Exercice 3

Soit $(E, \| . \|)$ un espace de Hilbert réel et A un opérateur linéaire borné Tel que $\forall x \in E$ $Ax = <a,x> a$; avec $a \in E$ (a fixé).

1) Montrer que A est un opérateur hermitien positif .
2) On suppose que B est un opérateur linéaire borné. Montrer que si B est hermitien alors B^2 hermitien positif .

Exercice 4

Soit $E=L^2([0,+\infty[)$ muni du produit scalaire suivant :

Université du 20 août 1955 Skikda.
Faculté des Sciences
Département de Mathématiques
3^{eme} année LICENCE
Module : Introduction à la théorie des opérateurs linéaires.
Dr N. BELLAL.
n.bellal@univ-skikda.dz
2016/2017

$\forall f, g \in E$: $< f, g >= \int_0^{+\infty} f(x)g(x)dx$. On considère l'opérateur U définie par

$$(U(f))(x) = \begin{cases} f(x-1), & x \geq 1 \\ 0, & 0 \leq x \leq 1 \end{cases}$$

1) Montrer que U est une isométrie (تقايس)
2) Déterminer l'adjoint (القرين) U^* de U. Calculer U^*U.
3) On suppose que $V = U U^*$. montrer que V est hermitien (هرميتي) et calculer V^2.
4) Calculer $Vf = U U^* f$ pour $f \in E$.

Exercice 5

Soit (α_n) une suite bornée de nombre complexe.

1) Montrer que si $x=(x_0,x_1,\ldots,\ldots x_n,\ldots) \in l^2$

Alors $y=(0, \alpha_0 x_0, \alpha_1 x_1, \alpha_2 x_2, \ldots, \alpha_n x_n, \ldots) \in l^2$

2) Soit $U : l^2 \to l^2$, $U(x)=y$

Vérifier que U est un opérateur continue et calculer sa norme.

3) Calculer U^*x, $U^* Ux$ et $U U^* x$ et vérifier que $\|U^*\|=\|U\|$ **.**
4) On suppose que $|\alpha_n|=1$. Montrer que $U^* U = I \neq U U^*$.